

Title	テンソル代数上の微分の $q$ -類似と $q$ -Schur-Weyl双対性 (等質空間と非可換調和解析)
Author(s)	伊藤, 稔
Citation	数理解析研究所講究録 (2010), 1722: 90-96
Issue Date	2010-12
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/170433">http://hdl.handle.net/2433/170433</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

## テンソル代数上の微分の $q$ 類似と $q$ -Schur–Weyl 双対性

(A  $q$ -analogue of derivations on the tensor algebra and  
the  $q$ -Schur–Weyl duality)

伊藤稔 (鹿児島大学)

Minoru ITOH (Kagoshima University)

### 序文

テンソル代数と無限対称群を融合した代数 ([I]) の  $q$  類似を構成したことを報告する. この代数を用いて  $q$ -Schur–Weyl 双対性 (量子展開環  $U_q(\mathfrak{gl}_n)$  と  $A$  型の岩堀–Hecke 代数との双対性) が簡潔に証明できる.

[I] で与えた代数  $\bar{T}(V)$  は通常のテンソル代数  $T(V)$  と無限対称群  $S_\infty$  を自然に含むものだった. そしてこの代数の上には正準交換関係の類似をみたす「微分作用素」が自然に作用する. この代数と微分作用素はテンソル代数上の表現論・不変式論の研究に役立つ. 例えばこれを利用して Schur–Weyl 双対性が簡潔に証明できた.

本稿ではこの  $\bar{T}(V)$  を  $q$  変形した代数  $\hat{T}(V)$  を得たことを報告する. この代数  $\hat{T}(V)$  は  $\bar{T}(V)$  と同じく通常のテンソル代数を部分代数として含み, それと同時に  $A_\infty$  型の岩堀–Hecke 代数  $H_\infty(q)$  を部分代数に持つ. いわばテンソル代数と岩堀–Hecke 代数の融合である. この代数  $\hat{T}(V)$  の上にはやはりある種の微分作用素が自然に考えられる. そしてこの微分作用素を利用して Schur–Weyl 双対性の  $q$  類似 (つまり量子展開環  $U_q(\mathfrak{gl}_n)$  と  $H_\infty(q)$  との双対性; [J]) が簡潔に証明できるのである.

この代数の原型である  $\bar{T}(V)$  は Schur–Weyl 双対性以外にも, 特殊線型群の作用に関する不変式論の第一基本定理の証明などテンソル代数における不変式論に活用できた. また immanant という行列関数, 特に quantum immanant (と呼ばれる普遍包絡環  $U(\mathfrak{gl}_n)$  の中心の線型基底; [O]) を調べる道具にもなった. 本稿で与える  $\hat{T}(V)$  についても, 今後  $U_q(\mathfrak{gl}_n)$  の表現論・不変式論の研究に役立つことを期待したい.

1.  $\hat{T}(V)$  の定義

まず代数  $\hat{T}(V)$  を定義しよう. 簡単に説明すると, 通常のテンソル代数の各斉次部分を無限次の岩堀-Hecke 代数の表現になるように誘導したものである. すなわち, 通常のテンソル代数の  $p$  次斉次部分には  $A_{p-1}$  型の岩堀-Hecke 代数が自然に作用するが, これを  $A_\infty$  型の岩堀-Hecke 代数の表現に誘導するのである.

もう少し丁寧に説明しよう.  $q \in \mathbb{C}^\times$  を固定して,  $H_p(q)$  を  $A_{p-1}$  型の岩堀-Hecke 代数, すなわち次の生成元と関係式で定まる  $\mathbb{C}$  上の結合的代数とする:

generators:  $t_1, \dots, t_{p-1}$ ,

relations:  $(t_i - q)(t_i + q^{-1}) = 0$ ,  $t_i t_{i+1} t_i = t_{i+1} t_i t_{i+1}$ ,  $t_i t_j = t_j t_i$  for  $|i - j| > 1$ .

$V$  を  $\mathbb{C}$  上の  $n$  次元ベクトル空間とし, その基底  $e_1, \dots, e_n$  を固定する. テンソル代数  $T(V)$  の  $p$  次斉次部分  $T_p(V) = V^{\otimes p}$  には  $H_p(q)$  の次のような右作用が考えられる ( $p$  次対称群の自然な作用の  $q$  類似):

$$H_p(q) \rightarrow \text{End}(V^{\otimes p}), \quad t_i \mapsto \text{id}_{V^{\otimes p-i-1}} \otimes t \otimes \text{id}_{V^{\otimes i-1}}.$$

ここで  $t$  は  $\text{End}(V \otimes V)$  の元で,  $i < j$  に対して次のように定める ( $t$  は右から適用する):

$$e_i e_i t = q e_i e_i, \quad e_i e_j t = e_j e_i, \quad e_j e_i t = e_i e_j + (q - q^{-1}) e_j e_i.$$

簡単のため, ベクトルのあいだの  $\otimes$  という記号は省略する.

この  $T_p(V) = V^{\otimes p}$  上の  $H_p(q)$  の表現を  $A_\infty$  型の岩堀-Hecke 代数  $H_\infty(q)$  (自然な包含関係  $H_0(q) \subset H_1(q) \subset H_2(q) \subset \dots$  の帰納的極限) の表現に誘導したものを  $\hat{T}_p(V)$  とする. すなわち,

$$\hat{T}_p(V) = \text{Ind}_{H_p(q)}^{H_\infty(q)} V^{\otimes p} = V^{\otimes p} \otimes_{H_p(q)} H_\infty(q)$$

とおく.  $p = 0$  のときは  $\hat{T}_0(V) = H_\infty(q)$  と定める. そしてこの  $\hat{T}_0(V), \hat{T}_1(V), \dots$  の直和を  $\hat{T}(V)$  と表す:

$$\hat{T}(V) = \bigoplus_{p \geq 0} \hat{T}_p(V).$$

このベクトル空間  $\hat{T}(V)$  に自然に積が考えられる. 二つの元

$$x = v_p \cdots v_1 \sigma \in \hat{T}_p(V), \quad y = w_q \cdots w_1 \tau \in \hat{T}_q(V)$$

(ただし  $v_i, w_j \in V, \sigma, \tau \in H_\infty(q)$ ) に対して, その積  $x \cdot y$  を

$$x \cdot y = (v_p \cdots v_1 \sigma) \cdot (w_q \cdots w_1 \tau) = v_p \cdots v_1 \cdot w_q \cdots w_1 \cdot \alpha^q(\sigma) \tau \in \hat{T}_{p+q}(V)$$

と定める（これは well-defined となる）．ここで  $\alpha$  は  $t_i \mapsto t_{i+1}$  という対応で決まる  $H_\infty(q)$  の（代数としての）自己準同型である．そしてこれを双線型になるように  $\hat{T}(V) \times \hat{T}(V)$  に拡張するのである．するとこの積に関して  $\hat{T}(V)$  は結合的な次数つき代数になる．また通常のテンソル代数  $T(V)$  および Hecke 代数  $H_\infty(q)$  は自然にこの代数の部分代数と見なせる．この大きな代数  $\hat{T}(V)$  が本稿の主役である．

## 2. 掛け算作用素と微分作用素

代数  $\hat{T}(V)$  において、正準交換関係の類似をみたす 2 系列の作用素（掛け算作用素と微分作用素）が自然に考えられる．

まず掛け算作用素を説明しよう．代数  $\hat{T}(V)$  の元  $x$  を固定してこれを「左から掛ける」という写像を考える．この「 $x$  による掛け算作用素」を  $L(x)$  という記号で表そう：

$$L(x): \hat{T}(V) \rightarrow \hat{T}(V), \quad y \mapsto xy.$$

特に  $x = v \in V \subset \hat{T}_1(V)$  の場合と  $x = \sigma \in H_\infty(q) = \hat{T}_0(V)$  の場合が基本的である（他のケースはこれらの合成と和で表される）．

次に  $v^* \in V$  に対応する線型作用素  $L(v^*): \hat{T}(V) \rightarrow \hat{T}(V)$  を考える（ただし  $V^*$  は  $V$  の双対空間）． $e_1^*, \dots, e_n^*$  を  $e_1, \dots, e_n$  の双対基底として、まず  $L(e_i^*)$  を次のように定める．

$$L(e_i^*): v_p \cdots v_1 \sigma \mapsto \sum_{r=1}^p (f_i v_p) \cdots (f_i v_{r+1}) \langle e_i^*, v_r \rangle (k_i^{-1} v_{r-1}) \cdots (k_i^{-1} v_1) \sigma.$$

ここで  $v_p, \dots, v_1$  は  $V$  の元、 $\sigma$  は  $H_\infty(q)$  の元とする．また  $k_i, f_i$  を

$$k_i: V \rightarrow V, \quad e_j \mapsto q^{\delta_{ij}} e_j, \quad f_i: V \rightarrow \hat{T}_1(V), \quad e_j \mapsto \begin{cases} e_j t_1, & i \leq j, \\ e_j t_1^{-1}, & i > j \end{cases}$$

で定まる線型写像とする．たとえば  $L(e_1^*)e_1 e_1 e_2$  を計算すると次のようになる：

$$\begin{aligned} L(e_1^*)e_1 e_1 e_2 &= (f_1 e_1)(f_1 e_1) \langle e_1^*, e_2 \rangle + (f_1 e_1) \langle e_1^*, e_1 \rangle (k_1^{-1} e_2) + \langle e_1^*, e_1 \rangle (k_1^{-1} e_1) (k_1^{-1} e_2) \\ &= (e_1 t_1)(e_1 t_1) 0 + (e_1 t_1) 1 (q^0 e_2) + 1 (q^{-1} e_1) (q^0 e_2) \\ &= e_1 t_1 e_2 + q^{-1} e_1 e_2 \\ &= e_1 e_2 t_2 + q^{-1} e_1 e_2. \end{aligned}$$

そして  $L: V^* \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\hat{T}(V))$  が線型になるように  $L(v^*)$  を定める．この  $L(v^*)$  の定義は well defined であり、特にそれから  $L(v^*)$  は右からの  $H_\infty(q)$  の作用と可換になることがわかる．この  $L(v^*)$  を「 $v^*$  による微分作用素」と呼ぼう．

$v \in V$  による掛け算作用素  $L(v)$  が次数を一つ上げるのとは対照的に, この微分作用素  $L(v^*)$  は次数を一つ下げることになる. そしてこれらのあいだには次のような交換関係が成り立つ:

**命題 2.1.**  $v \in V, v^* \in V^*$  に対して, 次の交換関係が成立する:

$$L(t_i)L(v) = L(v)L(t_{i+1}), \quad L(v^*)L(t_i) = L(t_{i+1})L(v^*).$$

**命題 2.2.**  $i < j$  のとき, 次の交換関係が成立する:

$$\begin{aligned} L(e_i)L(e_i) &= q^{-1}L(e_i)L(e_i)L(t) = qL(e_i)L(e_i)L(t^{-1}), \\ L(e_i)L(e_j) &= L(e_j)L(e_i)L(t^{-1}), \\ L(e_j)L(e_i) &= L(e_i)L(e_j)L(t), \\ L(e_i^*)L(e_i^*) &= q^{-1}L(t)L(e_i^*)L(e_i^*) = qL(t^{-1})L(e_i^*)L(e_i^*), \\ L(e_i^*)L(e_j^*) &= L(t^{-1})L(e_j^*)L(e_i^*), \\ L(e_j^*)L(e_i^*) &= L(t)L(e_i^*)L(e_j^*), \\ L(e_i^*)L(e_i) &= L(e_i)L(t)L(e_i^*) + K_i^{-1} = L(e_i)L(t^{-1})L(e_i^*) + K_i, \\ L(e_j^*)L(e_i) &= L(e_i)L(t^{-1})L(e_j^*), \\ L(e_i^*)L(e_j) &= L(e_j)L(t)L(e_i^*). \end{aligned}$$

ただし  $t = t_1$  とする. また線型変換  $K_i \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\hat{T}(V))$  を次のように定める:

$$K_i: e_{i_p} \cdots e_{i_1} \sigma \mapsto q^{\delta_{ii_1} + \cdots + \delta_{ii_p}} e_{i_p} \cdots e_{i_1} \sigma.$$

この交換関係は正準交換関係 (canonical commutation relation) や正準反交換関係 (canonical anticommutation relation) に似ている.  $\hat{T}(V)$  を Boson Fock 空間や Fermion Fock 空間の類似と見なして,  $L(v)$  と  $L(v^*)$  をそれぞれ「生成作用素」「消滅作用素」と呼ぶのも自然である.

### 3. 量子展開環の表現の記述

掛け算作用素  $L(v)$  と微分作用素  $L(v^*)$  は量子展開環  $U_q(\mathfrak{gl}(V))$  の  $V^{\otimes p}$  上の自然な表現  $\pi$  を記述するのに役立つ.

まず量子展開環  $U_q(\mathfrak{gl}(V))$  の定義を確認しておこう.  $V = \mathbb{C}^n$  に対して,  $U_q(\mathfrak{gl}(V))$  を次の生成元と関係式で定まる  $\mathbb{C}$  上の結合的代数とする ([J]):

$$\begin{aligned} \text{generators: } & q^{\pm \varepsilon_1/2}, \dots, q^{\pm \varepsilon_n/2}, \hat{e}_1, \dots, \hat{e}_{n-1}, \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_{n-1}, \\ \text{relations: } & q^{\varepsilon_i/2} q^{\varepsilon_j/2} = q^{\varepsilon_j/2} q^{\varepsilon_i/2}, \quad q^{\varepsilon_i/2} q^{-\varepsilon_i/2} = q^{-\varepsilon_i/2} q^{\varepsilon_i/2} = 1, \\ & q^{\varepsilon_i/2} \hat{e}_j q^{-\varepsilon_i/2} = q^{\delta_{ij} - \delta_{i,j+1}} \hat{e}_j, \quad q^{\varepsilon_i/2} \hat{f}_j q^{-\varepsilon_i/2} = q^{-\delta_{ij} + \delta_{i,j+1}} \hat{f}_j, \\ & \hat{e}_i \hat{f}_j - \hat{f}_j \hat{e}_i = \delta_{ij} \frac{q^{(\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1})/2} - q^{(-\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1})/2}}{q - q^{-1}}, \\ & \hat{e}_i \hat{e}_j = \hat{e}_j \hat{e}_i, \quad \hat{f}_i \hat{f}_j = \hat{f}_j \hat{f}_i \text{ for } |i - j| > 1, \\ & \hat{e}_i^2 \hat{e}_{i\pm 1} - (q + q^{-1}) \hat{e}_i \hat{e}_{i\pm 1} \hat{e}_i + \hat{e}_{i\pm 1} \hat{e}_i^2 = 0, \\ & \hat{f}_i^2 \hat{f}_{i\pm 1} - (q + q^{-1}) \hat{f}_i \hat{f}_{i\pm 1} \hat{f}_i + \hat{f}_{i\pm 1} \hat{f}_i^2 = 0. \end{aligned}$$

ただし  $q^{\varepsilon_i/2} q^{\varepsilon_j/2}$  を  $q^{(\varepsilon_i + \varepsilon_j)/2}$  などと表記している.

これらの生成元を用いて  $L$ -operator  $\hat{E}_{ij}(a) \in U_q(\mathfrak{gl}(V))$  を次のように定義する. まず

$$\hat{E}_{i,i+1} = \hat{e}_i, \quad \hat{E}_{i+1,i} = \hat{f}_i$$

とおいて, さらに  $i < j < k$  に対して次のように定める:

$$\hat{E}_{ik} = \hat{E}_{ij} \hat{E}_{jk} - q \hat{E}_{jk} \hat{E}_{ij}, \quad \hat{E}_{ki} = \hat{E}_{kj} \hat{E}_{ji} - q^{-1} \hat{E}_{ji} \hat{E}_{kj}.$$

そして  $i < j$  と  $a \in \mathbb{C}$  に対して,  $L$ -operator を次で定義する:

$$\hat{E}_{ij}(a) = a^{-1} q^{-(\varepsilon_i + \varepsilon_j - 1)/2} \hat{E}_{ij}, \quad \hat{E}_{ji}(a) = a q^{(\varepsilon_j + \varepsilon_i - 1)/2} \hat{E}_{ji}, \quad \hat{E}_{ii}(a) = \frac{a q^{\varepsilon_i} - a^{-1} q^{-\varepsilon_i}}{q - q^{-1}}.$$

**定理 3.1.**  $U_q(\mathfrak{gl}(V))$  の  $L$ -operator の作用に関して次が成立する:

$$\pi(\hat{E}_{ij}(1)) = L(e_i) L(e_j^*).$$

ここで  $\pi$  は  $U_q(\mathfrak{gl}(V))$  の  $V$  上の自然表現の  $p$  階テンソル積表現である:

$$\begin{aligned} \pi(\hat{e}_i) &= \sum k_i^{1/2} k_{i+1}^{-1/2} \otimes \dots \otimes k_i^{1/2} k_{i+1}^{-1/2} \otimes E_{i,i+1} \otimes k_i^{-1/2} k_{i+1}^{1/2} \otimes \dots \otimes k_i^{-1/2} k_{i+1}^{1/2}, \\ \pi(\hat{f}_i) &= \sum k_i^{1/2} k_{i+1}^{-1/2} \otimes \dots \otimes k_i^{1/2} k_{i+1}^{-1/2} \otimes E_{i+1,i} \otimes k_i^{-1/2} k_{i+1}^{1/2} \otimes \dots \otimes k_i^{-1/2} k_{i+1}^{1/2}, \\ \pi(q^{\pm \varepsilon_i/2}) &= k_i^{\pm 1/2} \otimes \dots \otimes k_i^{\pm 1/2} = K_i^{\pm 1/2}. \end{aligned}$$

ただし  $V$  上の線型変換  $k_i^{1/2}$  を  $e_j \mapsto q^{\delta_{ij}/2} e_j$  と定める.

4.  $q$ -SCHUR-WEYL 双対性

今与えた  $U_q(\mathfrak{gl}(V))$  の表現の記述を利用して, Schur-Weyl 双対性の  $q$  類似 (神保道夫 [J]) が簡潔に証明できる.

まず  $q$ -Schur-Weyl 双対性について確認しておこう. これは前節で述べた  $U_q(\mathfrak{gl}(V))$  の  $V^{\otimes p}$  への作用  $\pi$  と第 1 節で与えた  $H_p(q)$  の作用 (これを  $\rho$  と表そう) の間の関係である. 以下,  $q$  整数  $[k]$  と  $q$  階乗  $[k]!$  が登場するので, それらを定義しておく:

$$[k] = \frac{q^k - q^{-k}}{q - q^{-1}} = q^{k-1} + q^{k-3} + \cdots + q^{-k+1}, \quad [k]! = [k][k-1] \cdots [1].$$

**定理 4.1** ( $q$ -Schur-Weyl duality).  $[p]! \neq 0$  のとき,  $\text{End}(V^{\otimes p})$  において  $\pi(U_q(\mathfrak{gl}(V)))$  と  $\rho(H_p(q))$  は互いに他の commutant となる. すなわち次が成立する:

$$\text{End}(V^{\otimes p})^{\pi(U_q(\mathfrak{gl}(V)))} = \rho(H_p(q)), \quad \text{End}(V^{\otimes p})^{\rho(H_p(q))} = \pi(U_q(\mathfrak{gl}(V))).$$

この定理を証明するために次のような作用素を考える:

$$\mathcal{E} = \sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_p \leq n} \frac{1}{[I]!} L(e_{i_p}) \cdots L(e_{i_1}) L(e_{i_1}^*) \cdots L(e_{i_p}^*).$$

ただし  $[I]! = [m_1]! \cdots [m_n]!$  と定める. また  $m_1, \dots, m_n$  は  $i_1, \dots, i_p$  に現れる  $1, \dots, n$  の重複度である:

$$I = (i_1, \dots, i_p) = (\underbrace{1, \dots, 1}_{m_1}, \underbrace{2, \dots, 2}_{m_2}, \dots, \underbrace{n, \dots, n}_{m_n}).$$

直接的な計算で確かめられるように, この作用素  $\mathcal{E}$  に関して次の補題が成り立つ:

**補題 4.2.** 任意の  $x \in V^{\otimes p}$  に対して  $\mathcal{E}x = x$  が成立する. すなわち  $\mathcal{E}$  は  $V^{\otimes p}$  上では恒等変換となる.

これを利用して, 定理 4.1 は次のように証明できる.

**定理 4.1 の証明.** 二つの作用が可換になることは直接的な計算で確認できる.  $[p]! \neq 0$  のとき  $H_p(q)$  は半単純である ([GU]) から, 再交換団定理 ([GW]) を考えると  $\text{End}(V^{\otimes p})^{\rho(H_p(q))} \subset \pi(U_q(\mathfrak{gl}(V)))$  を証明すればよい.

$\Phi \in \text{End}(V^{\otimes p})^{\rho(H_p(q))}$  とする. 補題 4.2 を使うと  $x \in V^{\otimes p}$  に対して  $\Phi(x)$  は次のように書き直せる:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \Phi(\mathcal{E}x) \\ &= \Phi\left(\sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_p \leq n} \frac{1}{[I]!} L(e_{i_p}) \cdots L(e_{i_1}) L(e_{i_1}^*) \cdots L(e_{i_p}^*) x\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Phi\left(\sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_p \leq n} \frac{1}{[I]!} L(e_{i_p}) \cdots L(e_{i_1}) \sigma_I\right) \\
&= \Phi\left(\sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_p \leq n} \frac{1}{[I]!} e_{i_p} \cdots e_{i_1} \sigma_I\right).
\end{aligned}$$

ここで  $L(e_{i_1}^*) \cdots L(e_{i_p}^*)x$  を単に  $\sigma_I$  と表している. この  $\sigma_I$  は  $H_p(q)$  の元であり  $\Phi$  は  $H_p(q)$  の作用と可換であるから,  $\Phi(x)$  はさらに次のように書き直せる.

$$\begin{aligned}
\Phi(x) &= \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_p \leq n} \frac{1}{[I]!} \Phi(e_{i_p} \cdots e_{i_1}) \sigma_I \\
&= \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_p \leq n} \frac{1}{[I]!} L(\Phi(e_{i_p} \cdots e_{i_1})) L(e_{i_1}^*) \cdots L(e_{i_p}^*) x.
\end{aligned}$$

命題 2.1, 2.2 で述べた交換関係を利用すると

$$L(\Phi(e_{i_p} \cdots e_{i_1})) L(e_{i_1}^*) \cdots L(e_{i_p}^*)$$

の部分は  $L(v)L(v^*)$  と  $K_i$  の積・和の形に書き直せて, 定理 3.1 からこれが  $\pi(U_q(\mathfrak{gl}(V)))$  の元であることがわかる. これは  $\Phi \in \pi(U_q(\mathfrak{gl}(V)))$  を意味する. これで定理 4.1 の主張が示されたことになる.  $\square$

定理 4.1 は  $q$  が  $[p]! \neq 0$  をみたすときのみ成立する (これは  $H_p(q)$  が半単純になるための必要十分条件でもある). 実際に今の証明も  $[p]! = 0$  のときには  $[I]! = 0$  となるような  $I$  が存在するために破綻する ( $I$  がすべて同じ添字からなるとき). 定理を成り立たせる  $q$  の条件が, ちょうどこのような形で現れるのは面白い.

## REFERENCES

- [GW] R. Goodman and N. R. Wallach, *Representations and invariants of the classical groups*, Cambridge Univ. Press, 2003.
- [GU] A. Gyoja and K. Uno, *On the semisimplicity of Hecke algebras*, J. Math. Soc. Japan, **41** (1989), no. 1, 75–79.
- [I] M. Itoh, *Extensions of the tensor algebra and their applications*, preprint 2009. arXiv:0909.5586.
- [J] M. Jimbo, *A  $q$ -analogue of  $U(\mathfrak{gl}(N+1))$ , Hecke algebra, and the Yang–Baxter equation*, Lett. Math. Phys. **11** (1986), no. 3, 247–252.
- [O] A. Okounkov, *Quantum immanants and higher Capelli identities*, Transform. Groups **1** (1996), no. 1, 99–126.